POLYNOMY

P .. pole, $x \notin P$, $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \ldots, a_n \in P$

POLYNOM neurčité x nad polem P je výraz

$$f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 .$$

Píšeme $f \in P[x]$

STUPEŇ polynomu f je $m \in \mathbb{N}$ maximální z těch, pro která $a_m \neq 0$, označujeme $\deg f$.

Když $m = \deg f$, potom a_m se nazývá VEDOUCÍ KOEFICIENT polynomu f, ozn. $\operatorname{lc} f$.

$f, g \in P[x] \quad f = a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0$

$g = b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0$

SOUČET polynomů f, g je polynom

$f+g = c_p x^p + \dots + c_1 x + c_0$, kde

$p = \max\{m, n\}$ a $c_k = a_k + b_k$ pro $k \in \{1, \dots, p\}$

Př.: $f = x^2 + 1$, $g = x - 1$

$f + g = x^2 + x$

$f \in P[x]$, $k \in P$, pak $k \cdot f = k a_m x^m + \dots + k a_1 x^1 + k a_0$

$-f = -a_m x^m - \dots - a_1 x - a_0$ se nazývá

OPAČNÝ polynom k polynomu f.

$f, g \in P[x] \quad f = a_m x^m + \dots + a_0$

$g = b_n x^n + \dots + b_0$

SOUČIN polynomů f, g je polynom

$f \cdot g = c_p x^p + \dots + c_1 x + c_0$, kde $p = m + n$

a $c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0 =$

$$= \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \quad \text{pro } k \in \{0, \dots, p\}$$

Př.: $f = x^2 + x + 1$, $g = x^2 - x + 3$

$f \cdot g = x^4 - x^3 + 3x^2 + x^3 - x^2 + 3x + x^2 - x + 3$

$= x^4 + 0x^3 + 3x^2 + 2x + 3$

$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 3$

$c_3 = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0 = 0$

$c_4 = a_0 b_4 + a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1 + a_4 b_0 = 1$

<u>Tvrzení</u> Součin nenulových polynomů je nenulový polynom a platí

$$\deg(fg) = \deg f + \deg g$$

$$lc(fg) = lc f \cdot lc g.$$

<u>Tvrzení</u> $f, g, h \in P[x]$. Pak

1) $f+g=g+f$
2) $f+(g+h)=(f+g)+h$
3) $f+0=f$
4) $f+(-f)=0$
5) $f\cdot g=g\cdot f$
6) $f\cdot(g\cdot h)=(f\cdot g)\cdot h$
7) $f\cdot 1=f$
8) $f\cdot(g+h)=f\cdot g+f\cdot h$.

Říkáme, že polynom $g \in P[x]$ DĚLÍ polynom $f \in P[x]$, jestliže existuje polynom $h \in P[x]$ tak, že $f = g \cdot h$. Zapisujeme $g \mid f$. g je DĚLITEL f.

Příř. $f = x^2 - 1$, $g = x+1$, $h = x-1$
$\Rightarrow f = g \cdot h$.

Tvrzení 1) $g \mid f$ a $f \mid h \Rightarrow g \mid h$
2) $h \mid f$ a $h \mid g \Rightarrow h \mid f \pm g$
3) $h \mid f \Rightarrow h \mid f \cdot g$.

$f \in P[x]$ se nazývá NORMOVANÝ, jestliže $f \neq 0$ a $\operatorname{lc} f = 1$.

$f \in P[x]$, $f \neq 0$, pak $\overline{f} = \frac{1}{\operatorname{lc} f} \cdot f$

Lemma $f, g \in P[x]$ normované polynomy. Následující podm. jsou ekvivalentní.
1) $f \mid g$ a $g \mid f$.
2) $f = g$.

$f, g \in P[x]$, polynom $d \in P[x]$ se nazývá NEJVĚTŠÍ SPOLEČNÝ DĚLITEL f, g, když

1) d je normovaný,
2) $d \mid f$ a $d \mid g$,
3) když $h \in P[x]$, $h \mid f$ a $h \mid g \Rightarrow h \mid d$.

Zapisujeme $d = D(f, g)$.

Tvrzení $f, g \in P[x]$. Pokud existuje $D(f,g)$, pak je jediný.

Tvrzení $f, g \in P[x]$, $g \neq 0$. Pak existují polynomy $q, r \in P[x]$ takové, že

1) $f = g q + r$,

2) $r = 0$ nebo $\deg r < \deg g$.

Tvrzení $f, g \in P[x]$ nenulové. Pak existuje jejich největší společný dělitel d a polynomy $u, v \in P[x]$ tak, že $d = fu + gv$.

REDUCIBILNÍ polynom je nekonstantní polynom, který je součinem dvou nekonstantních polynomů.

IREDUCIBILNÍ polynom je nekonstantní polynom, který není reducibilní.

$f = x^2 - 1$, $g = x + 1$, $h = x - 1$

$f = x^2 + 1$

Tvrzení $f \in P[x]$ normovaný. Pak existují normované ireducibilní polynomy $g_1, \dots, g_n$ tak, že

$$f = g_1 \cdots g_n.$$